2. *(адитивність)*. Якщо область D є об'єднання двох областей D_1 та D_2 (рис.10), які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

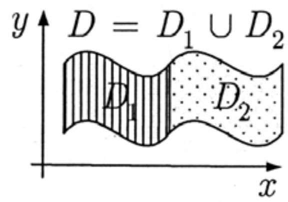

Рис. 10

3. *(нормованість)*. $\iint\limits_{D} 1dxdy = \text{площа}(D) = S_D$.

4. Якщо $f(x,y) \ge 0,\ (x,y) \in D$, і подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ існує, то $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \ge 0$.

5. Якщо $f(x,y) \le g(x,y),\ (x,y) \in D$, то $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \le \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy$, за умови, що обидва подвійні інтеграли існують.

6. Якщо функція f неперервна в області D, то справедлива нерівність

$$mS_D \le \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy \le MS_D,$$

де $m = \min\limits_{D} f(x,y),\ M = \max\limits_{D} f(x,y),\ S_D$ – площа області D.

7. Якщо функція f неперервна в області D, то існує точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ така, що

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S_D.$$

У подальшому розглядаються неперервні в області D функції $f(x,y)$.

§4. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній декартовій системі координат

Покажемо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів.

Область D називають правильною у напрямі осі Oy, якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках (рис.11).

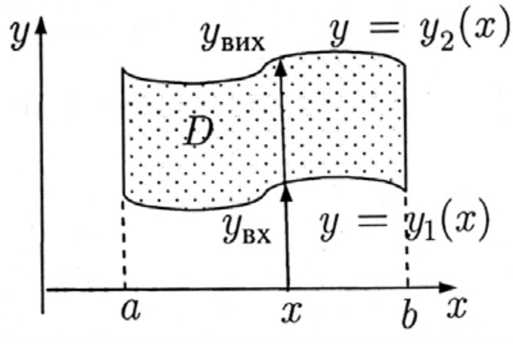

Рис. 11

Нехай неперервна функція $f(x,y) \ge 0$.

Тоді $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ виражає об'єм V циліндричного тіла.

Нехай $[a,b]$ − проекція області D на вісь Ox. Зафіксуємо x на відрізку $[a,b]$ і побудуємо переріз циліндричного тіла площиною $x = const$, перпендикулярної до осі Ox (рис.12). У перерізі дістанемо криволінійну трапецію $MNPQ$, площу якої можна знайти за формулою (x − константа, y − змінна):

$$S(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \quad x = const \in [a;b]$$

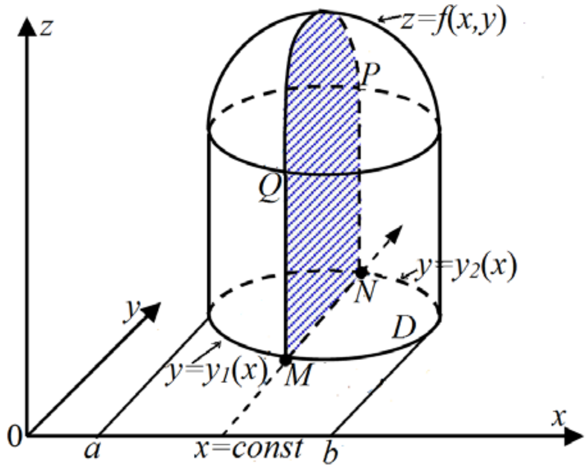

Рис.12

Згідно з методом перерізів

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx .$$

Отже,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (4.1)$$

Інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ називають *внутрішнім*, а інтеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ – *зовнішнім*. Праву частину одержаної формули називають *повторним* інтегралом.

Для області D, *правильної у напрямі осі Ox*, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках (рис.13), маємо формулу

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

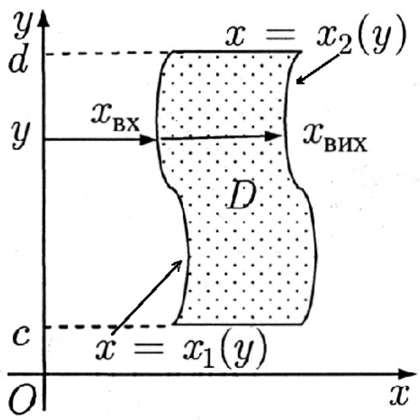

Рис. 13

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x.

Якщо область D обмежена вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ та горизонтальними прямими $y = c$, $y = d$ (рис.14), то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

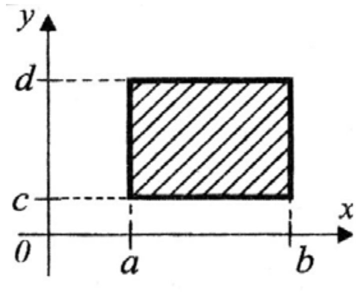

Рис.14

Причому це єдиний випадок сталих меж у внутрішньому інтегралі.

Формули обчислення подвійного інтеграла через повторні залишаються справедливими для будь-якої неперервної функції $f(x,y)$.

Зауваження. Якщо область не є правильною у жодному з напрямів, то її треба розбити на області, правильні в одному із напрямів.

Приклад 1. Довести, що за умови $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)$, $g\left(x,y\right)=g_1\left(y\right)$ і прямокутної області інтегрування справедлива рівність

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\cdot g(x,y)dy = \int\limits_a^b f(x,y)dx\cdot\int\limits_c^d g(x,y)dy\,.$$

Доведення. Область інтегрування − прямокутник (рис. 14): $a\le x\le b$, $c\le y\le d$, тобто внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування. Запишемо у лівій частині рівності, яку треба довести, $f_1\left(x\right)$ замість $f\left(x,y\right)$ і $g_1\left(y\right)$ замість $g\left(x,y\right)$ та проінтегруємо одержаний вираз:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\cdot g(x,y)dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f_1(x)\cdot g_1(y)dy =$$

$$=\left\{\text{інтегруючи по } y,\ f_1\left(x\right) \text{ вважаємо сталою, тому виносимо } f_1\left(x\right) \text{ за інтеграл}\right\} =$$

$$=\int\limits_a^b\left(f_1(x)\int\limits_c^d g_1(y)dy\right)dx = \int\limits_a^b\left(f_1(x)\cdot G_1(y)\Big|_c^d\right)dx =$$

$$=\left\{\text{де } G_1\left(y\right) \text{є первісною функції } g_1(y)\right\} = \int\limits_a^b f_1(x)\left(G_1\left(d\right)-G_1\left(c\right)\right)dx =$$

$$=\left\{\ G_1\left(d\right)-G_1\left(c\right) \text{ не містить змінних, тобто є сталою, виносимо її за інтеграл}\right\} =$$

$$=\left(G_1\left(d\right)-G_1\left(c\right)\right)\cdot\int\limits_a^b f_1(x)dx =$$

$$=\left\{G_1\left(y\right)-\text{первісна для } \mathrm{g}_1\left(y\right), \text{ тобто } \left(G_1\left(d\right)-G_1\left(c\right)\right)=\int\limits_c^d g_1(y)dy\right\} =$$

$$=\int\limits_c^d g_1(y)dy\cdot\int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_c^d g(x,y)dy\cdot\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y)dx\cdot\int\limits_c^d g(x,y)\,dy\,.$$

Отже, ми довели, що $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\cdot g(x,y)dy = \int_a^b f(x,y)dx \cdot \int_c^d g(x,y)dy$ за умови, що $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)$ і $g\left(x,y\right)=g_1\left(y\right)$.

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} \left(x+2y\right)dx$.

Розв'язок. Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл. Інтегруючи по *x*, змінну *y* вважаємо сталою:

$$\int_{y^2-4}^{5} \left(x+2y\right)dx = \int_{y^2-4}^{5} x\,dx + 2y\cdot \int_{y^2-4}^{5} dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{y^2-4}^{5} + \left.2y\,x\right|_{y^2-4}^{5} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(5^2-\left(y^2-4\right)^2\right)+2y\left(5-\left(y^2-4\right)\right)=\frac{9}{2}-\frac{y^4}{2}+4y^2+18y-2y^3.$$

Тепер обчислимо зовнішній інтеграл від функції, яку отримали при обчисленні внутрішнього інтеграла:

$$\int_{-3}^{3}\left(\frac{9}{2}-\frac{y^4}{2}+4y^2+18y-2y^3\right)dy=\left.\left(\frac{9}{2}y-\frac{y^5}{10}+\frac{4y^3}{3}+9y^2-\frac{y^4}{2}\right)\right|_{-3}^{3}=$$

$$=\frac{9}{2}\left(3-(-3)\right)-\frac{3^5-(-3)^5}{10}+\frac{4}{3}\left(3^3-(-3)^3\right)+9\left(3^2-(-3)^2\right)-\frac{3^4-(-3)^4}{2}=$$

$$=27-\frac{3^5}{5}+72+0-0=50,4$$

Відповідь: 50,4

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \left(xy^3-5x^2+4\right)dxdy$, де область *D* обмежена прямими $x=3$, $y=-x$, $y=2x$.

Розв'язок. Обчислення подвійного інтеграла $\iint_D \left(xy^3-5x^2+4\right)dxdy$ зведемо до обчислення повторного інтегралу.

Перш за все побудуємо область інтегрування (рис.15).

Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують область інтегрування, розв'язуючи відповідні системи рівнянь:

$$A:\begin{cases} y=2x \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow A(3;6), \quad B:\begin{cases} y+x=0 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow B(3;-3), \quad O:\begin{cases} y=2x \\ x+y \end{cases} \Rightarrow O(0;0).$$

Виберемо порядок інтегрування, пам'ятаючи, що зовнішній інтеграл повинен мати сталі межі інтегрування, а у внутрішнього інтеграла межі інтегрування будуть функції, що залежать від змінної зовнішнього інтеграла. Задана область *D* правильна у напрямі осі *Oy*, тому природно вибрати змінну *x* змінною зовнішнього інтеграла. Для заданої області *D* інтервал зміни змінної x буде $0 \le x \le 3$ (рис.15). Тепер, щоб визначити як змінюється змінна *y*, коли $x \in [0,3]$, будемо проводити через точки відрізку $[0,3]$ на осі *x* довільні прямі, паралельні осі *Oy*, рухаючись по осі *x* від точки 0 до точки 3. Всі ці прямі будуть перетинати область *D*, при цьому точки входу цих прямих в область *D* будуть лежати на прямій $y = -x$, а точки виходу − на прямій $y = 2x$ (рис. 16). Таким чином, для заданої області *D*, коли змінна *x* прямує від $x_1 = 0$ до $x_2 = 3$, змінна *y* змінюється від $y_1(x) = -x$ до $y_2(x) = 2x$ (це і є межі інтегрування внутрішнього інтеграла).

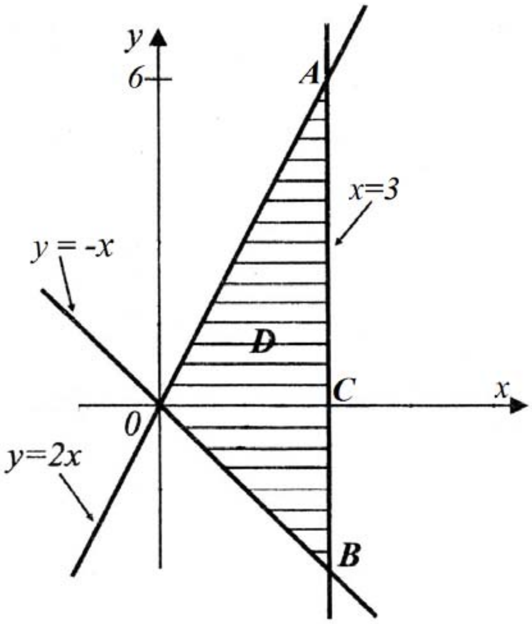

Рис.15

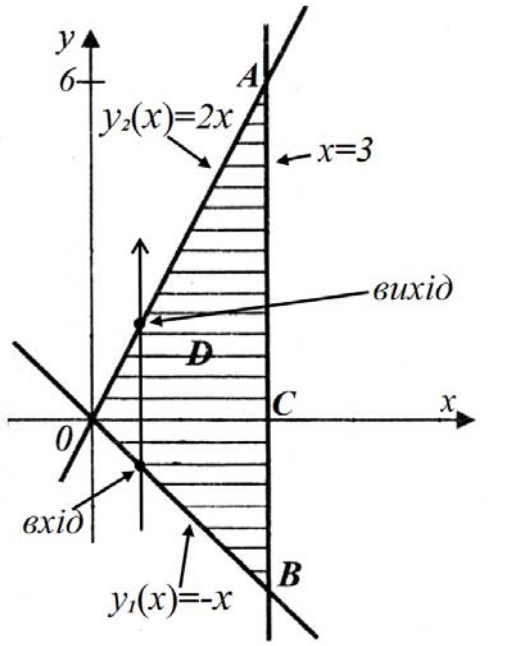

Рис.16

Отже, заданий подвійний інтеграл запишеться у вигляді повторного інтеграла:

$$I = \iint\limits_D \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-x}^{2x} \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dy = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{-x}^{2x} \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dy \right)dx .$$

Почнемо з обчислення внутрішнього інтеграла. Інтегруючи по *y*, змінну *x* вважаємо сталою:

$$\int\limits_{-x}^{2x} \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dy = x\int\limits_{-x}^{2x} y^3 dy - 5x^2 \int\limits_{-x}^{2x} dy + 4\int\limits_{-x}^{2x} dy = x \cdot \frac{y^4}{4}\Bigg|_{-x}^{2x} - 5x^2 \cdot y\Bigg|_{-x}^{2x} + 4y\Bigg|_{-x}^{2x} =$$

$$= \frac{x}{4}\left((2x)^4 - (-x)^4\right) - 5x^2\left(2x - (-x)\right) + 4\left(2x - (-x)\right) = \frac{15}{4}x^5 - 15x^3 + 12x .$$

Тепер обчислимо зовнішній інтеграл від функції, яку отримали при обчисленні внутрішнього інтеграла:

$$\int_0^3\left(\frac{15}{4}x^5-15x^3+12x\right)dx=\frac{15}{4}\int_0^3 x^5dx-15\int_0^3 x^3dx+12\int_0^3 x\,dx=\frac{5}{8}x^6\Big|_0^3-\frac{15}{4}x^4\Big|_0^3+6x^2\Big|_0^3=\frac{1647}{8}.$$

Зауважимо, що можна було б вибрати *y* в якості змінної зовнішнього інтеграла, але задана область *D* не є правильною у напрямі осі *Ox*, тому довелось би розбити область *D* на дві правильні області у напрямі осі *Ox* (*OAC* та *OCB*) а, отже, для обчислення заданого інтеграла треба було б обчислити два повторних інтеграли. Тому при виборі порядку інтегрування потрібно завжди враховувати, який спосіб для обчислення найзручніший.

Відповідь: $\frac{1647}{8}$.

Приклад 4. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{y^2-4}^{0}f(x,y)dx$.

Розв'язок. Зміна порядку інтегрування в повторному інтегралі полягає в зміні ролі змінних інтегрування. Так, у даному прикладі внутрішнє інтегрування проводиться за змінною *x*, а зовнішнє – за *y*. Змінити порядок інтегрування – означає записати даний повторний інтеграл у вигляді іншого повторного інтегралу, в якому змінна інтегрування внутрішнього інтеграла буде *y*, а зовнішнього – *x*.

Область інтегрування *D* безпосередньо не задана, тому спочатку потрібно побудувати область інтегрування, виходячи з меж повторного інтеграла. Ця область буде правильною у напрямі осі *Ox*, оскільки зовнішній інтеграл береться за змінною *y*. Прямі $y=-2$ і $y=1$ паралельні осі *Ox* і обмежують область інтегрування знизу та зверху. За цих умов змінна *x* задовольняє нерівності $y^2-4\le x\le 0$, тобто область *D* ліворуч обмежена лінією $x=y^2-4$, а праворуч − лінією $x=0$.

Побудуємо область інтегрування. Лінія $x=y^2-4$ – парабола, симетрична щодо осі *Ox*, з вершиною в точці $A(-4;0)$, гілки параболи напрямлені праворуч; $x=0$ – рівняння осі *Oy*; $y=-2$, $y=1$ – прямі, паралельні осі *Ox* (рис. 17).

Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують область *D*:

$$B:\begin{cases}x=y^2-4\\ y=1\end{cases}\Rightarrow B(-3;1),\quad C:\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\Rightarrow C(0;1),\quad M:\begin{cases}x=0\\ x=y^2-4\end{cases}\Rightarrow M(0;-2).$$

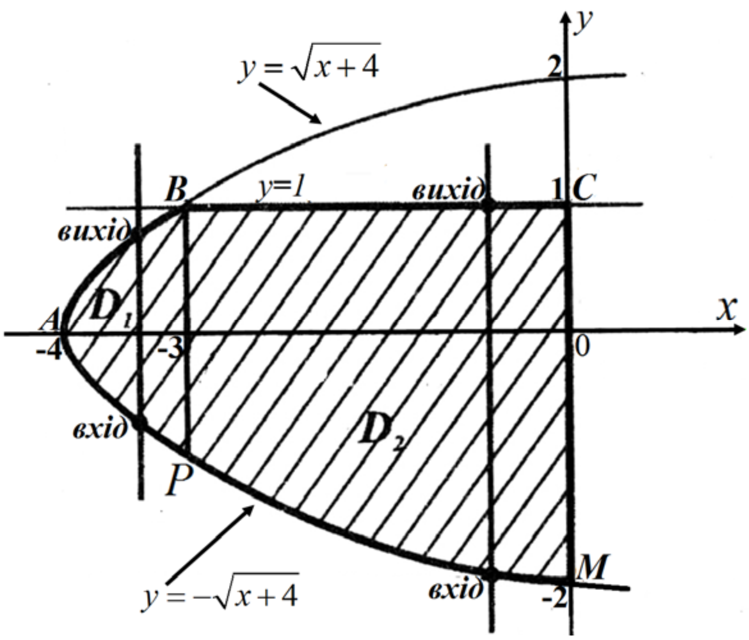

Рис. 17

З рис.17 видно, що область *D* не є правильною у напрямі осі *Oy*, тому треба розбити область *D* на правильні області у напрямі осі *Oy*. Для цього спроектуємо область *D* на вісь *Ox* і отримаємо для змінної *x* на осі *Ox* проміжок зміни: $x\in[-4,0]$. Тепер, щоб визначити як змінюється змінна *y*, коли $x\in[-4,0]$, будемо проводити через точки відрізку $[-4,0]$ на осі *x* довільні прямі, паралельні осі *Oy*, рухаючись по осі *x* від точки -4 до точки 0. Всі ці прямі будуть перетинати область *D*. Від $x=-4$ до $x=-3$ точки входу цих прямих в область *D* будуть лежати на нижній гілці параболи $x=y^2$ (її рівняння $y=-\sqrt{x+4}$), а точки виходу − на верхній гілці цієї параболи (її рівняння $y=\sqrt{x+4}$), а від $x=-3$ до $x=0$ точки входу − на нижній гілці параболи $x=y^2$, а точки виходу − на прямій $y=1$ (рис. 17). Отож, область *D* треба розбити на дві правильні області D_1 − фігура *PABP* і D_2 − фігура *PBCMP*. Точка *P* симетрична точці *B* відносно осі *Ox* і має координати $(-3;-1)$. Коли змінна *x* змінюється від $x=-4$ до $x=-3$, змінна *y* змінюється від $y=-\sqrt{x+4}$ до $y=\sqrt{x+4}$ (це є межі інтегрування внутрішнього інтеграла першого повторного інтеграла), а коли змінна *x* змінюється від $x=-3$ до $x=0$, змінна *y* змінюється від $y=-\sqrt{x+4}$ до $y=1$ (це є межі інтегрування внутрішнього інтеграла другого повторного інтеграла). Таким чином, маємо:

$$\int_{-2}^{1}dy\int_{y^2-4}^{0}f(x,y)\,dx=\int_{-4}^{-3}dx\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}}f(x,y)\,dy+\int_{-3}^{0}dx\int_{-\sqrt{x+4}}^{1}f(x,y)\,dy.$$

Зауваження: рівняння ліній, що обмежують область інтегрування D і є межами внутрішнього інтеграла, повинні бути визначені як функції щодо змінної, за якою обчислюється зовнішній інтеграл.

Приклад 5. Змінивши порядок інтегрування, записати даний вираз у вигляді одного повторного інтеграла:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy .$$

Розв'язок. Область інтегрування D_1 першого інтеграла визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$, а область інтегрування D_2 другого інтеграла визначається нерівностями $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le \frac{3-x}{2}$.

Побудуємо ці області:

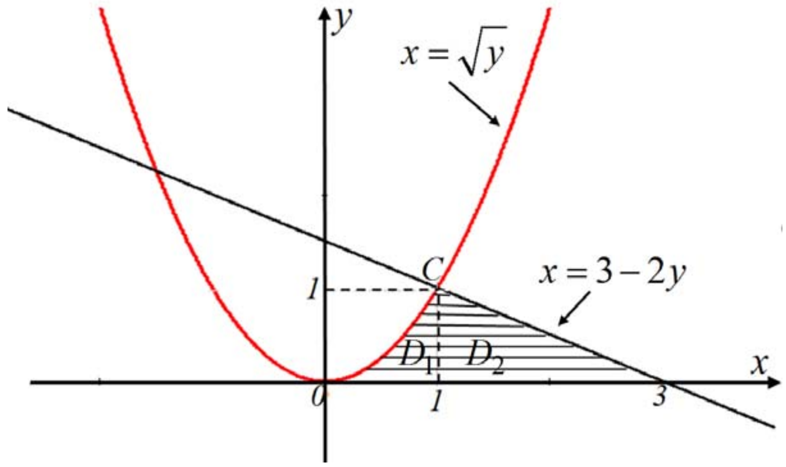

Рис. 18

Область $D = D_1 \bigcup D_2$ − правильна у напрямі осі Ox, обмежена параболою $y = x^2$ та прямими $y = \frac{3-x}{2}$ і $y = 0$ (рис.18).

Точка C перетину параболи $y = x^2$ та прямої $y = \frac{3-x}{2}$ має координати

$$C: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{3-x}{2} \end{cases} \Rightarrow C(1;1).$$

Область D проектується на вісь Oy в проміжок $[0,1]$, тобто зовнішній інтеграл за змінною y буде мати нижню межу інтегрування 0, а верхню − 1. Щоб з'ясувати, як змінюється змінна x, коли $y \in [0,1]$, будемо проводити через точки відрізку $[0,1]$ на осі y довільні прямі, паралельні осі Ox, рухаючись по осі Oy від точки 0 до точки 1. Всі ці прямі будуть перетинати область D, при цьому точки входу цих прямих в область D будуть лежати на правій гілці параболи

$y = x^2$, рівняння якої $x = \sqrt{y}$, а точки виходу − на прямій $y = \frac{3-x}{2}$, рівняння якої запишемо у вигляді $x = 3 - 2y$ (рис. 18). Таким чином, для області *D*, коли змінна y прямує від $y = 0$ до $y = 1$, змінна x змінюється від $x = \sqrt{y}$ до $x = 3 - 2y$ (це і є межі інтегрування внутрішнього інтеграла)

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 3 - 2y \end{cases}.$$

Заданий вираз запишемо у вигляді одного повторного інтеграла:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$$

§5. ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

5.1. Загальний випадок заміни змінної

Нехай $f(x,y)$− неперервна в області *D* функція. За таких умов існує подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Відобразимо область *D* за допомогою функцій $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ в область $\tilde{D}$. При цьому будемо вважати, що таке відображення взаємно-однозначне, тобто виконуються наступні умови:

1) кожна точка області *D* відображається в єдину точку області $\tilde{D}$;
2) різні точки області *D* відображаються в різні точки області $\tilde{D}$;
3) кожній точці області $\tilde{D}$ відповідає точка області *D*, яка відображається в цю точку.

За таких умов з функцій $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ однозначно можна виразити функції $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$.

Тоді кожній точці $M(x;y) \in D$ відповідає певна точка $\tilde{M}(u,v) \in \tilde{D}$.

Якщо функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ мають в області $\tilde{D}$ неперервні частинні похідні, то справедлива наступна *формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right|dudv, \qquad (5.1)$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, за умови, що $J(u,v) \ne 0$.