Визначник $J(u,v)$ називають *якобіаном (визначником Якобі-Остроградського)*. Його модуль є коефіцієнтом спотворення площі за такої заміни змінних, тобто: $dxdy = |J(u,v)|dudv$.

5.2. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід від прямокутних декартових до полярних координат (рис.19). Такий перехід здійснюють за наступними формулами:

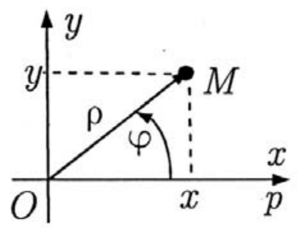

Рис. 19

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \;\; 0 < \varphi \le 2\pi,$$

тобто, в даному випадку функції $x = x(\rho,\varphi)$, $y = y(\rho,\varphi)$ взаємно-однозначно перетворюють область $\tilde{D}$ в область D.

При цьому маємо:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

тобто $|J(\rho,\varphi)| = \rho$.

Таким чином, при переході від прямокутної декартової системи координат до полярної системи формула (5.1) набуває наступного вигляду:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.2)$$

В області, яка обмежена променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$, і яку називають радіальною (рис.20), для обчислення подвійного інтеграла справедлива формула:

$$\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho$$

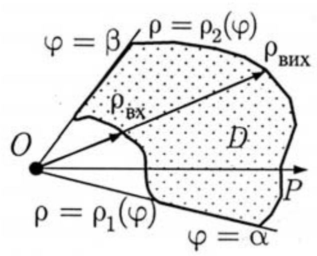

Рис. 20

Для *узагальненої полярної системи координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \;\; 0 < \varphi \le 2\pi, \quad J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho,$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.3)$$